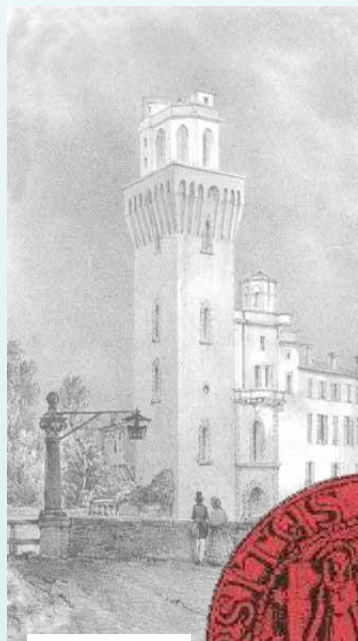


# ONDE GRAVITAZIONALI

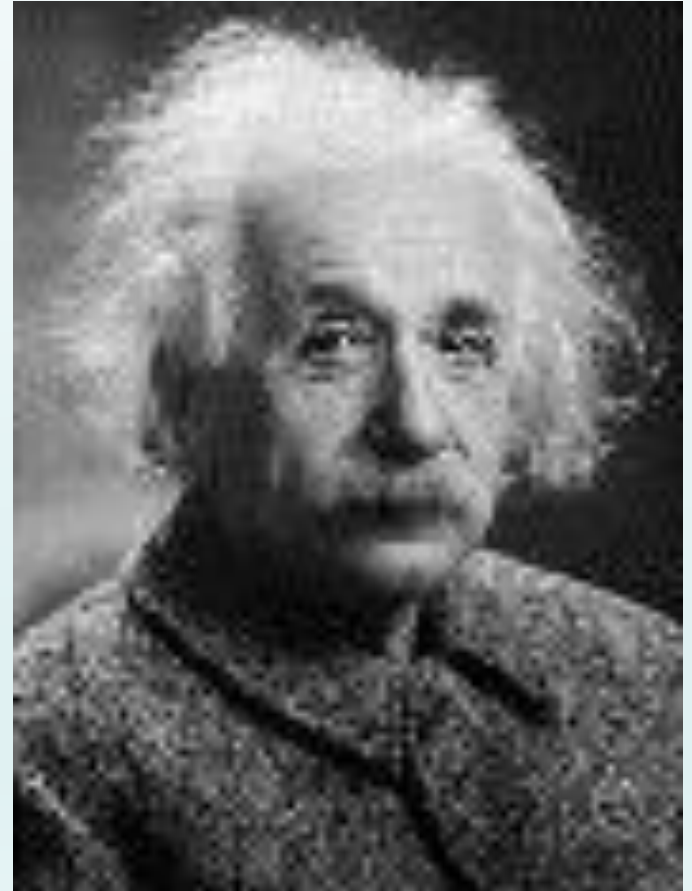
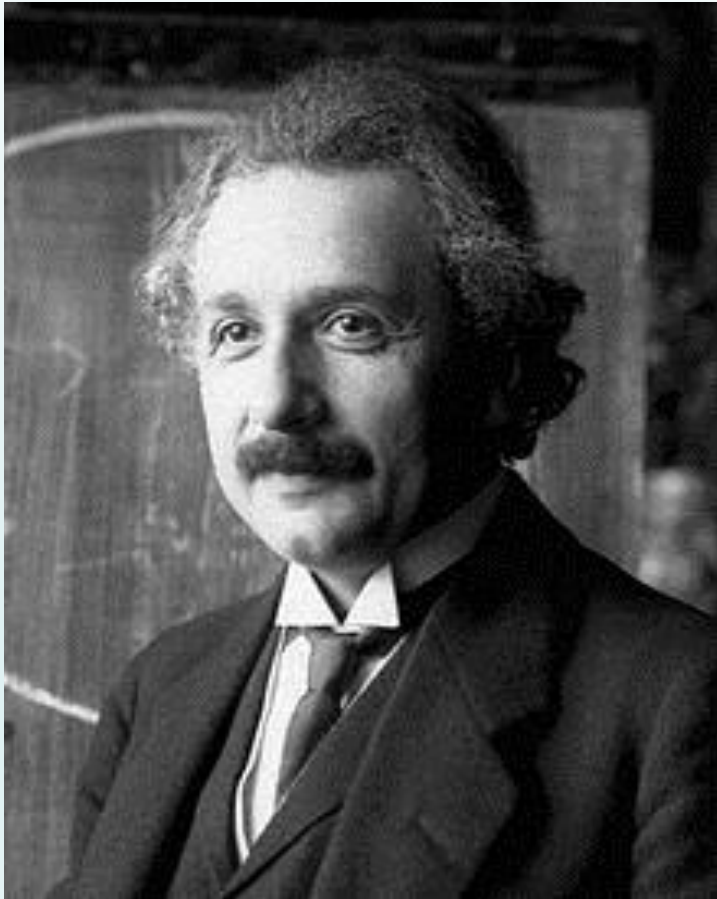
Cesare Chiosi

Dipartimento di Fisica ed Astronomia,  
Università di Padova, Italia



IVSLA, Venezia, 18 Marzo, 2016

# 1916: Albert Einstein predice le Onde Gravitazionali in Relatività Generale

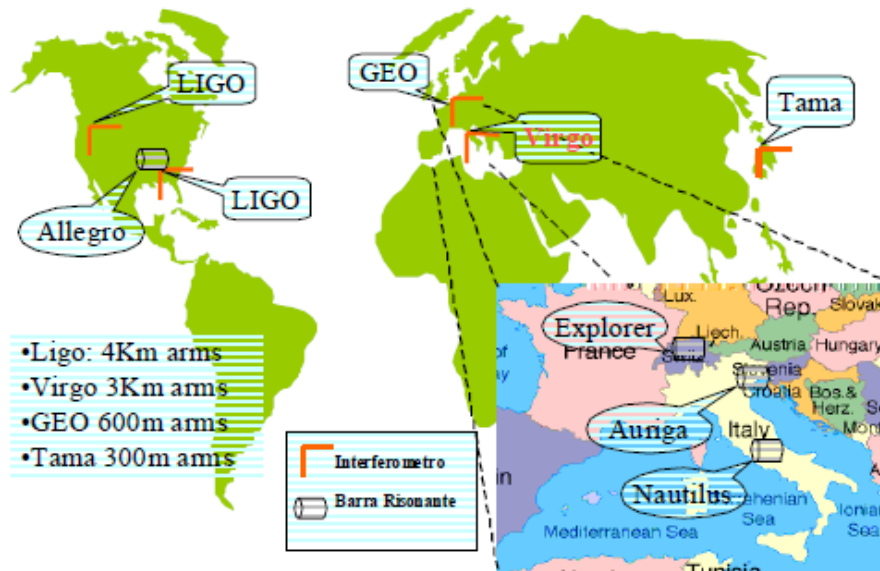


# 2016: La Collaborazione LIGO-VIRGO scopre le Onde Gravitazionali: GW 150914

## Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory


VIRGO: dal nome del Virgo  
Cluster

Detectors per Onde Gravitazionali



- Abbott et al (2016) Physical Review Letter 116, 061102 (2016)

# Annuncio

 Selected for a Viewpoint in *Physics*  
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
12 FEBRUARY 2016

PRL 116, 061102 (2016)



## Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

B. P. Abbott *et al.*\*

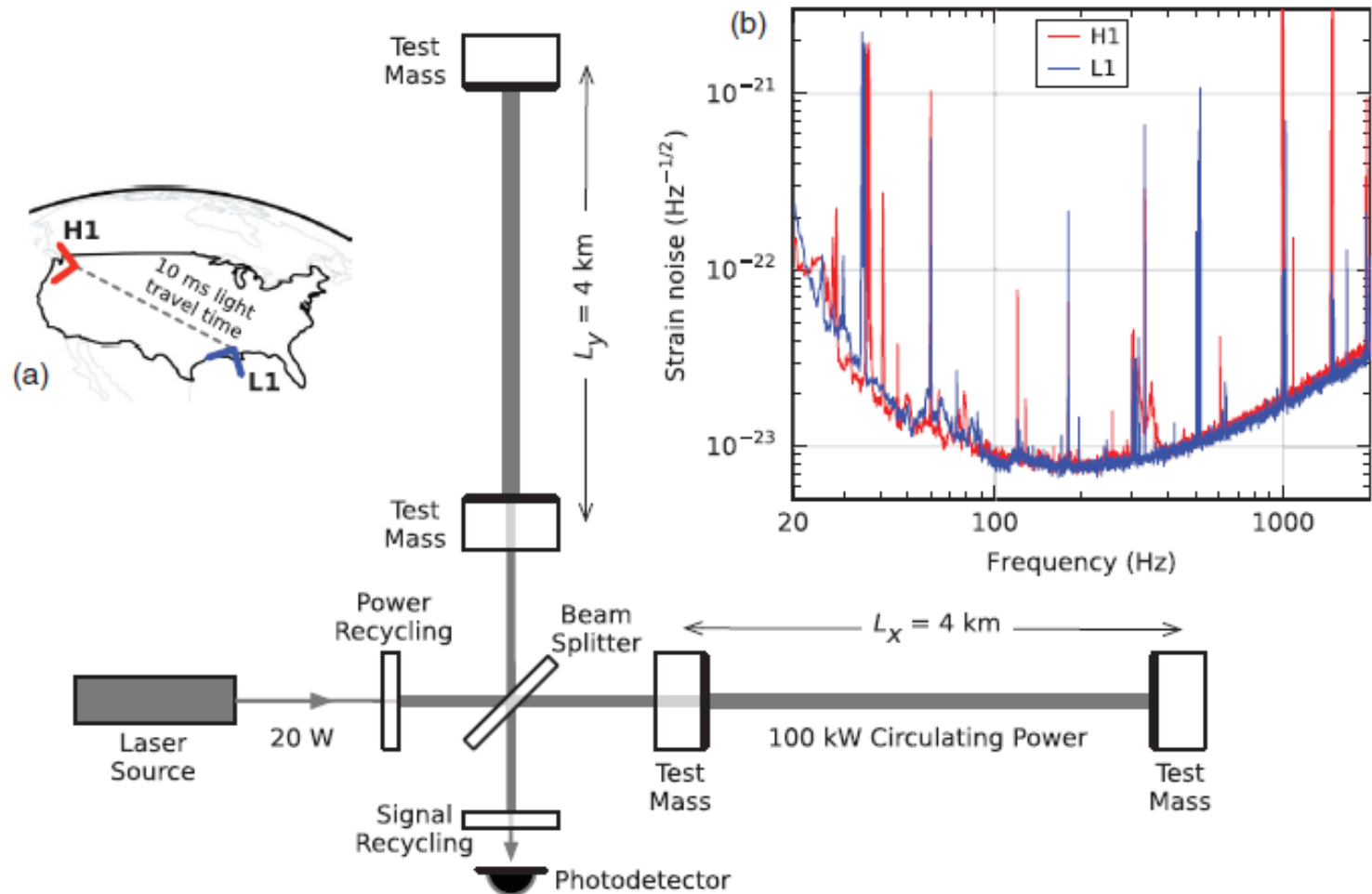
(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

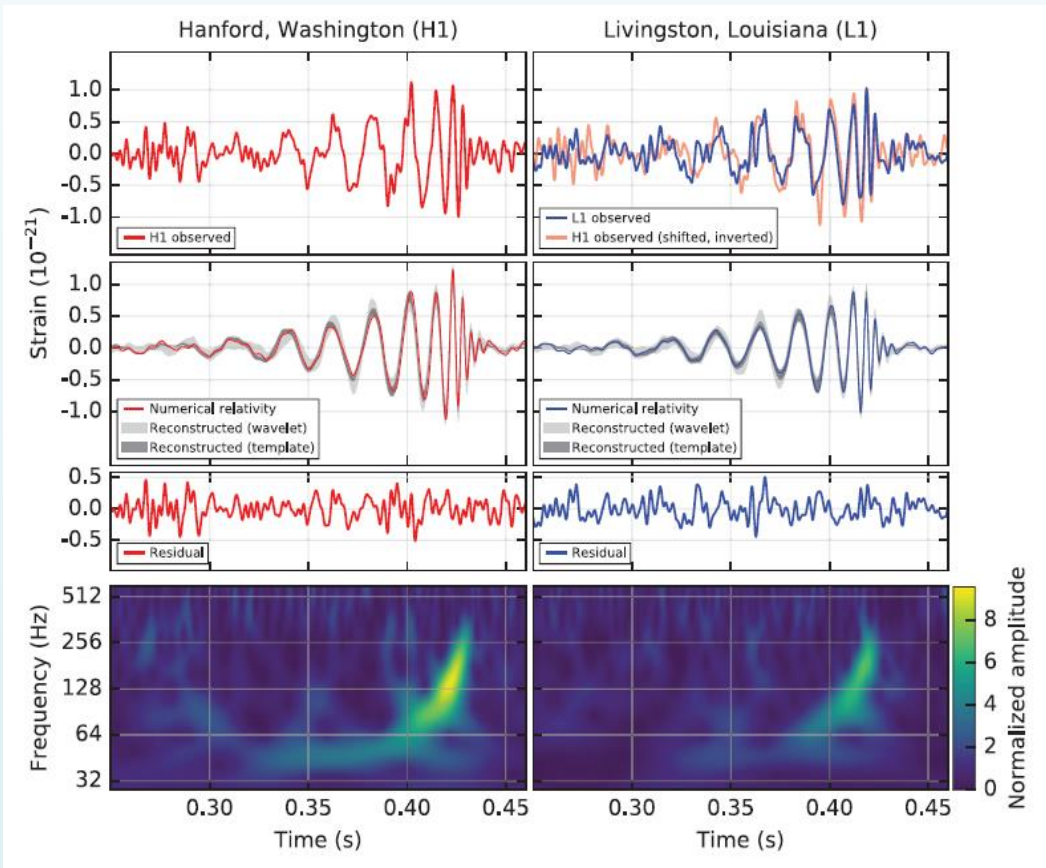
On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of  $1.0 \times 10^{-21}$ . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than  $5.1\sigma$ . The source lies at a luminosity distance of  $410_{-180}^{+160}$  Mpc corresponding to a redshift  $z = 0.09_{-0.04}^{+0.03}$ . In the source frame, the initial black hole masses are  $36_{-4}^{+5}M_{\odot}$  and  $29_{-4}^{+4}M_{\odot}$ , and the final black hole mass is  $62_{-4}^{+4}M_{\odot}$ , with  $3.0_{-0.5}^{+0.5}M_{\odot}c^2$  radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102

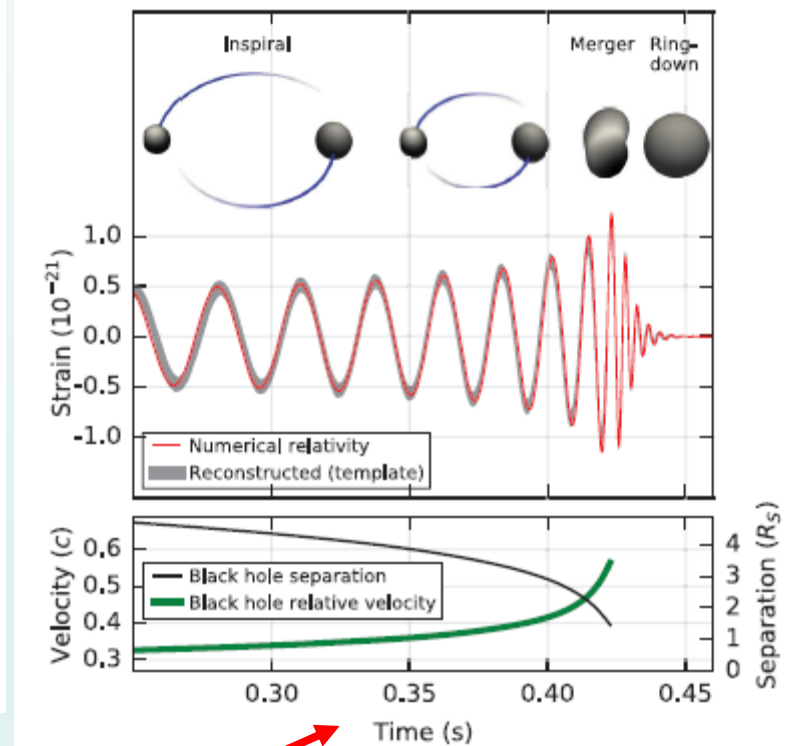
# Rivelatore di LIGO: non in scala



# Evento: GW 150914



Ampiezza della perturbazione  
al rivelatore



Velocità orbitali e separazione



# Che cosa viene misurato?

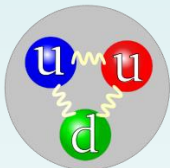
Molto più piccolo del raggio del protone

- Interferometro: due bracci ortogonali uguali di lunghezza  $L_x = L_y = L = 4 \text{ km}$

$$\Delta L(t) = \delta L_x - \delta L_y = h(t) L$$

dove  $h(t)$  è lo « *strain gravitazionale* ».

- Stimo  $h(t)$  alla frequenza massima  $f = 350 \text{ Hz}$ ,  $h(t) = 1 \times 10^{-21}$
- Si ottiene  $\Delta L = (4 \times 10^5) \times (10^{-21} / f^{0.5})$  che è confrontabile con qualche millesimo del raggio del protone



$$\Delta L \ll r_p \approx 1.535 \times 10^{-16} \text{ cm}$$

# Fusione di Due Buchi Neri (BH)

- I dati di GW150914 suggeriscono la coalescenza di due BH binari, cioè lo spiraleggiare dell'orbita seguito dalla fusione, e successiva vibrazione dei BH.
- In 0.2 s (ovvero 8 cicli) il segnale aumenta da 35 a 150 Hz, quando l'ampiezza diventa massima.
- L'evoluzione è caratterizzata da una « massa vibrante »

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G} \left[ \frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right]^{3/5},$$

dove  $f$  and  $f'$  sono la frequenza e sua derivata temporale.

$\mathcal{M} = 30 M_{\odot}$ ,  $M = m_1 + m_2 \geq 70 M_{\odot}$ ,  $R_{1s} + R_{2s} = 2GM/c^2 \geq 210 \text{ km}$  (somma dei due Raggi di Schwarzschild). **Due Stelle di Neutroni non sono adeguate allo scopo in quanto non hanno massa sufficiente.**



# Stima di Masse, Distanza, Redshift...

TABLE I. Source parameters for GW150914. We report median values with 90% credible intervals that include statistical errors, and systematic errors from averaging the results of different waveform models. Masses are given in the source frame; to convert to the detector frame multiply by  $(1+z)$  [90]. The source redshift assumes standard cosmology [91].

Primary black hole mass	$36_{-4}^{+5} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$29_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole mass	$62_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole spin	$0.67_{-0.07}^{+0.05}$
Luminosity distance	$410_{-180}^{+160}$ Mpc
Source redshift $z$	$0.09_{-0.04}^{+0.03}$

# Massa & Energia spese in Onde Gravitazionali (OG)

- Dalle simulazioni della fusione di due BN si ottiene
- Energia Totale irradiata in OG circa  $3.0 \pm 0.5 M_{\odot} c^2$
- Luminosity di picco in OG  $3.6^{+0.5}_{-0.4} \times 10^{56}$  erg/s  
equivalente a  $200^{+30}_{-20} M_{\odot} c^2$
- Lunghezza d'onda Compton del **Gravitone**  $\lambda_g > 10^{13}$  km
- Massa del Gravitone  $m_g < 1.2 \times 10^{-22}$  eV / $c^2$
- Frequenza dell' evento da **2 a 400 Gpc<sup>-3</sup> anno<sup>-1</sup>**

# Questioni legate alla massa dei progenitori dei BH

- Esistenza di BH con massa maggiore di circa 25  $M_{\odot}$ .
- Prova che BH binari possono esistere e possono coalescere in un tempo minore del tempo di Hubble.
- I BH possono essere prodotti da stelle singole (sotto opportune condizioni) e da stelle multiple per interazioni dinamiche in ambienti molto densi.

# Quali candidati a sorgenti di OG?

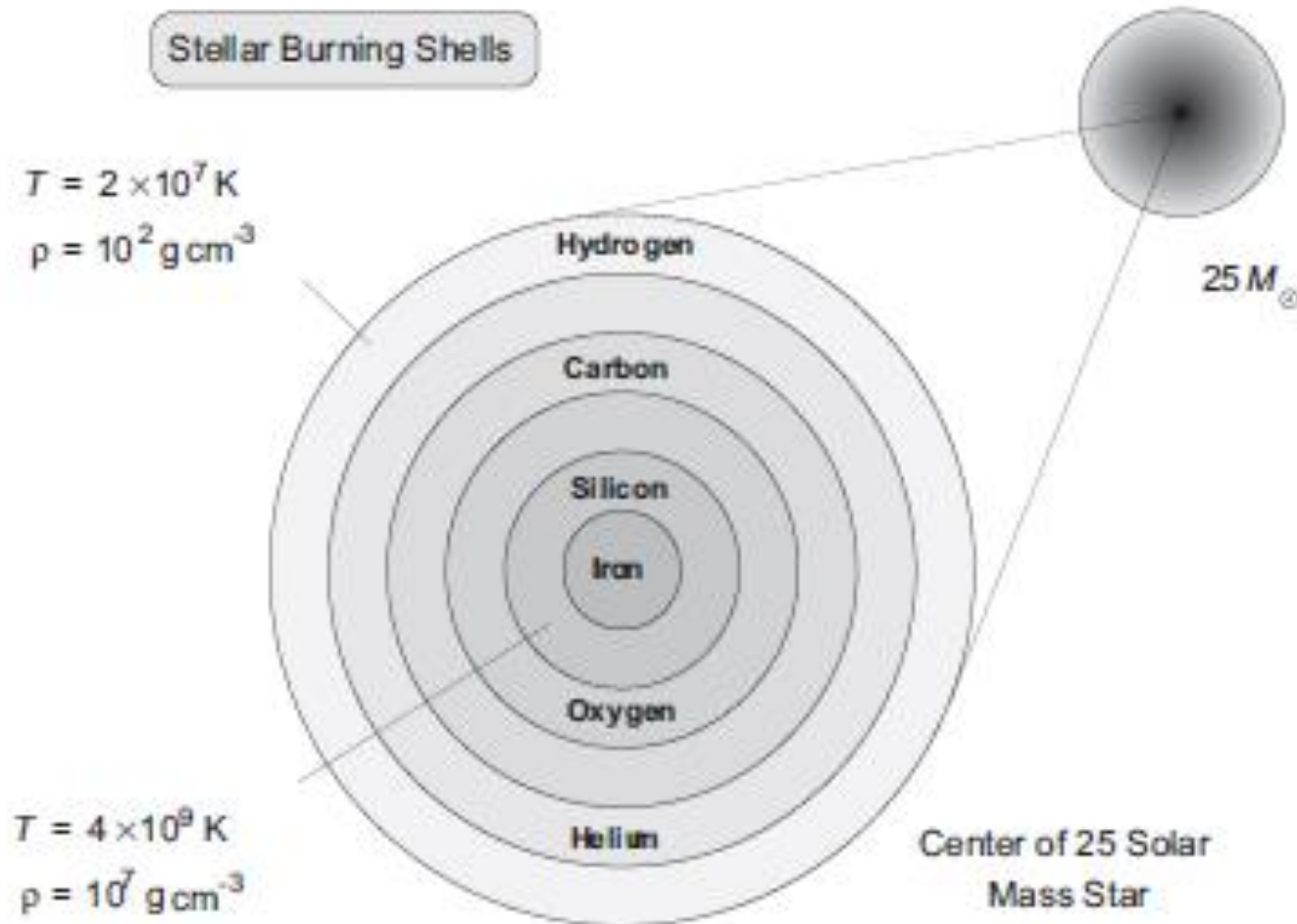
I migliori candidati sono

- Stelle compatte come le Nane Bianche (WD), le stelle di Neutroni (NS) e i Buchi Neri (BH) in sistemi binari.
- Stelle massicce e Super-massicce con nucleo rotante nella fase di collasso alla fine delle loro evoluzione.

# Progenitori di NS e BH

- Rapido riassunto dell'evoluzione di stelle massicce e super-massicce. Il fatto essenziale Eterna battaglia contro la Gravità.
- Tutta la vita di una stella è regolata dalla Gravità a cui si oppongono le forze generate dalla Pressione, a sua volta data dalla Equazione di Stato (EOS).
- Se  $F_G = F_P$ , la stella è in equilibrio meccanico e si evolve tranquillamente.
- Se  $F_G < F_P$ , la stella devia dall'equilibrio meccanico ed esplose.
- If  $F_G > F_P$ , la stella devia dall'equilibrio meccanico e implode per collasso gravitazionale.

# Struttura di una Stella Massiccia



# Supernove di Tipo II: Collasso del Nucleo

$$P = P_e + P_r + P_i$$

$$Y_e = \frac{n_e}{\rho N_A}$$

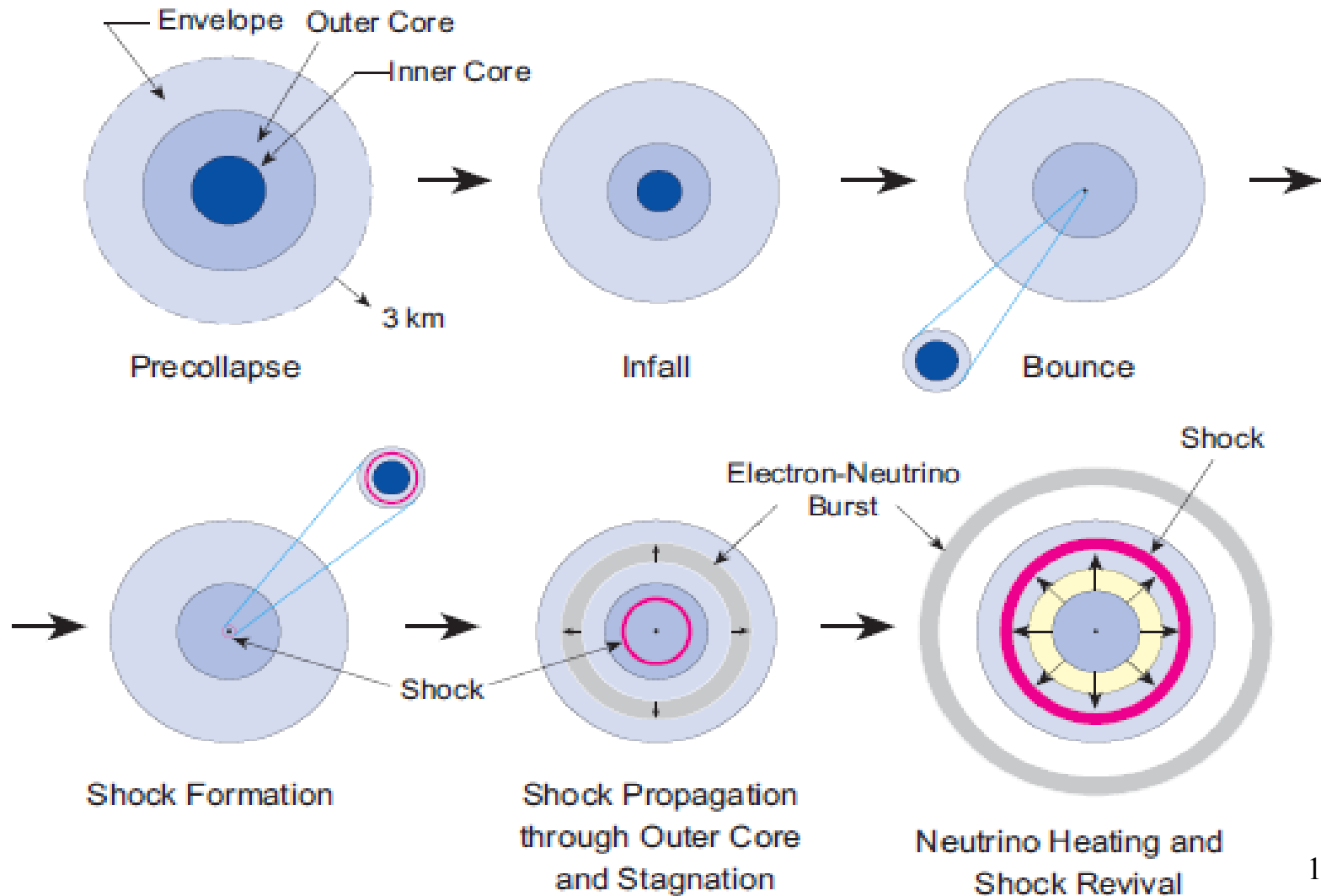
$$M_{Ch} = 5.83 Y_e^2 \left[ 1 + \frac{\pi^2 k^2 T^2}{\mathcal{E}_F^2} \right]$$

- Un nucleo di Ferro con massa in eccesso del limite  $M_{Ch}$  collassa con una scala temporale termica in quanto i neutrini portano via energia a causa di due instabilità:
  1. e-captures on Fe-group  $\rightarrow$  aumenta la composizione a favore di nuclei n-rich,  
 $\rightarrow$  diminuiscono  $n_e$  &  $P_e$ ,  $\rightarrow M_{Ch}$  si riduce; la materia si neutronizza.
  2. Foto-dissociazione di Fe  $\rightarrow$  aumento della densità numerica dei nuclei  $\alpha$  senza arrivare a totale disintegrazione; successivamente i nuclei  $\alpha$  si decompongono in protoni and neutroni; diminuisce  $P_r$ .

*Diminuiscono  $P_e$  e  $P_r$   $\rightarrow$  collasso*



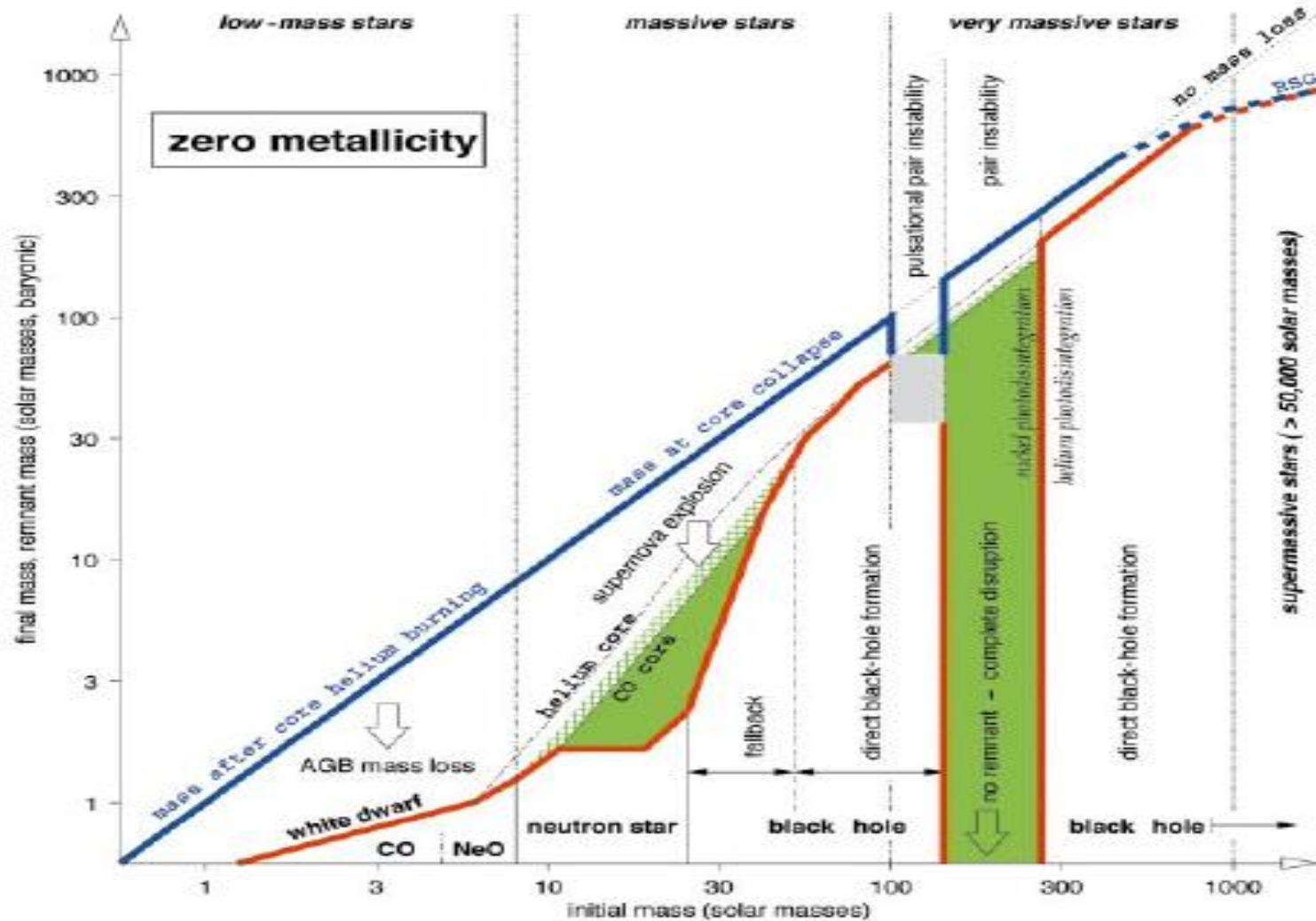
# Collasso, Nucleo Rigido e Onda d'Urto



# Remnants di Stelle Massicce: NS & BH

- Le stelle con massa iniziale nell' intervallo 10 – 30  $M_{\odot}$  producono NS con masse vicino alla massa di Chandraseckhar (1.4  $M_{\odot}$ ).
- Stelle con massa iniziale superiore a circa 30  $M_{\odot}$  non possono formare una NS e collassano a BH con masse diverse.

# Chi fa cosa?



# Chi fa cosa ?

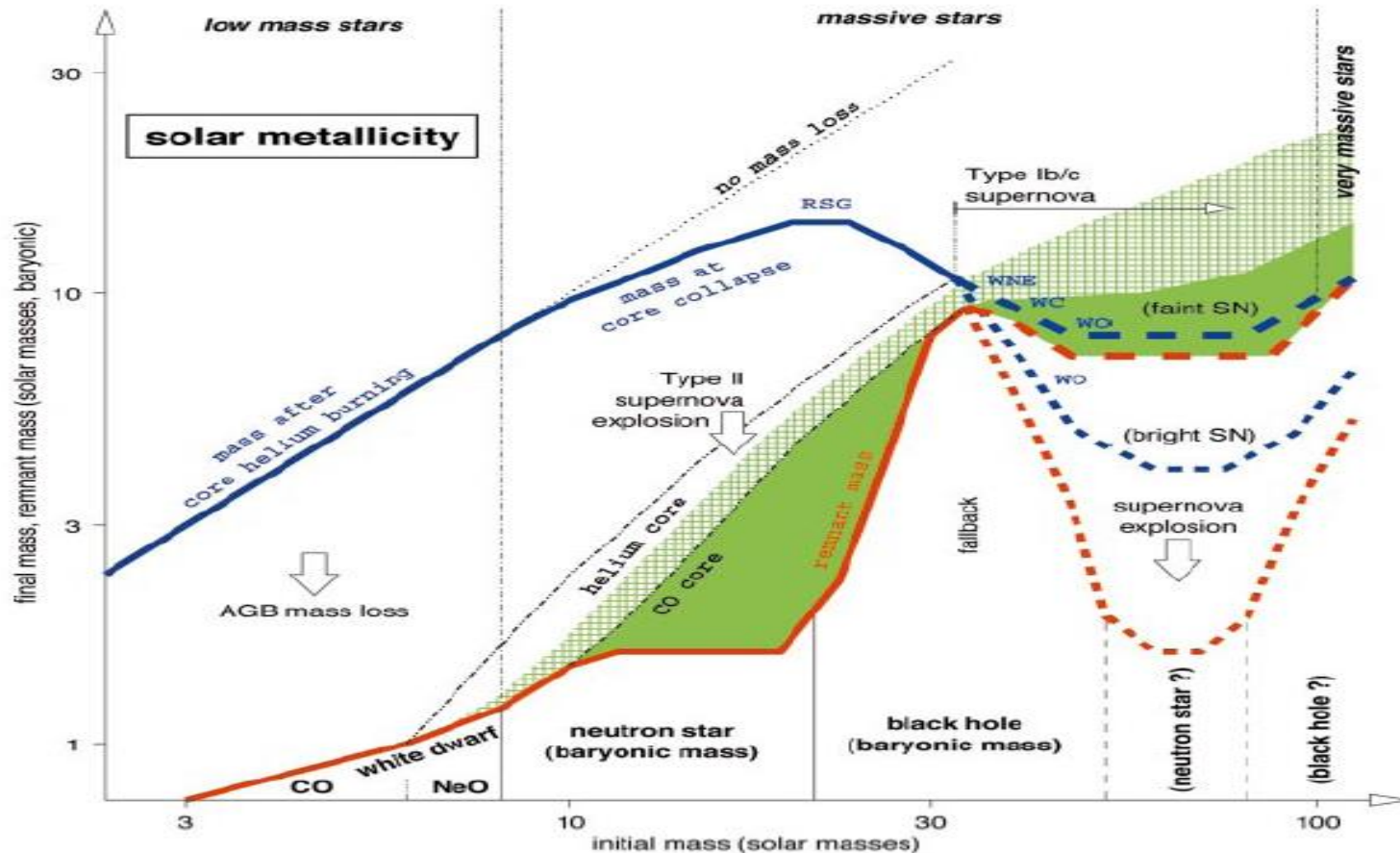


FIG. 16. Initial-final mass function of nonrotating stars of solar composition, similar to Fig. 12. Mass loss reduces the mass of the envelope (blue curve) until, for a mass above  $\sim 33M_{\odot}$  the helium core is uncovered before the star reaches core collapse. At this point the star becomes a Wolf-Rayet star and the strong Wolf-Rayet mass loss sets in. We give two scenarios for the uncertain strength of the Wolf-Rayet-mass-loss rate: The short-dashed red and blue lines are for a high mass-loss rate. Here a “window” of initial masses may exist around  $50M_{\odot}$ , where neutron stars are still formed (bound by higher- and lower-mass stars that make black holes). For a low Wolf-Rayet mass-loss rate (long-dashed red and blue lines) the final mass at core collapse is higher and the “neutron star window” may not exist. Then only black holes are formed above  $\sim 21M_{\odot}$ . “RSG,” “WNE,” “WC,” and “WO” indicate the type of the last mass-loss phase and also the (spectral) type of the star when it explodes. The heavy-element production (green and green cross hatched) is given only for the low-mass-loss case [Color].

# Diagramma Sinottico (metallicita' e massa)

↑  
M  
E  
T  
A  
L  
L  
I  
C  
I  
T  
Y

*In breve, mentre le NS hanno sempre la stessa massa indipendentemente da quella del progenitore, i BH hanno masse in genere crescenti con la massa del progenitore ma anche fortemente dipendenti dalla storia precedente di quest'ultimo, la quale a sua volta dipende dalla composizione chimica (metallicita'). Ciò rende il panorama molto vario ed incerto. Le masse dei BH per metallicita' normali sono di alcune  $M_{\odot}$ . BH con decine di  $M_{\odot}$  sono possibili solo con bassissima (nulla) metallicita'.*

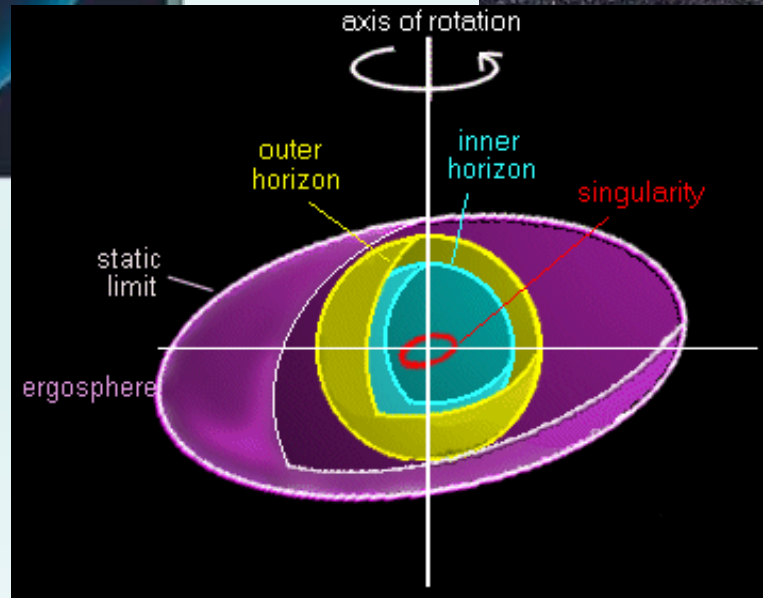
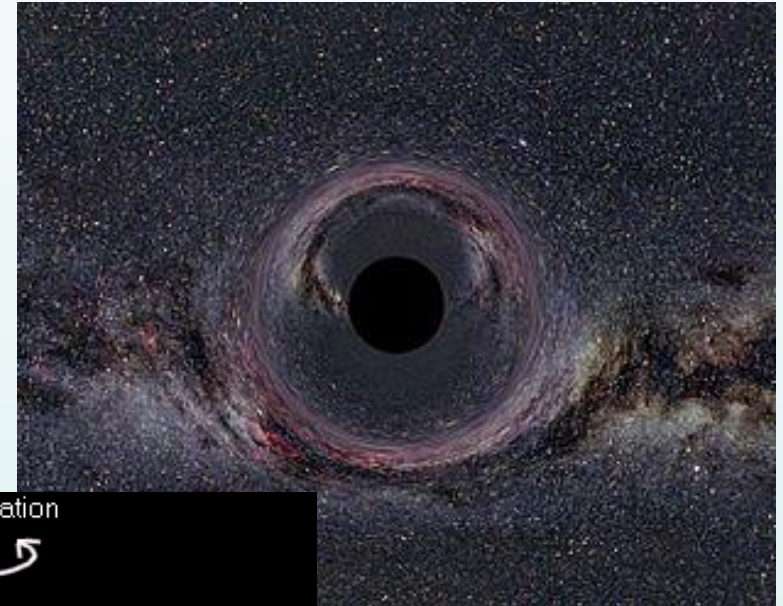
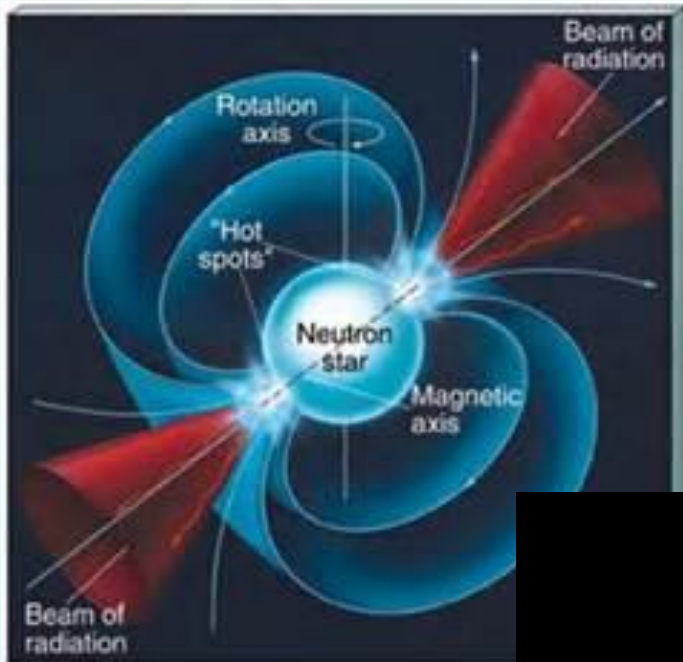
initial mass (solar masses)

FIG. 1.—Remnants of massive single stars as a function of initial metallicity ( $y$ -axis; qualitatively) and initial mass ( $x$ -axis). The thick green line separates the regimes where the stars keep their hydrogen envelope (left and lower right) from those where the hydrogen envelope is lost (upper right and small strip at the bottom between 100 and 140  $M_{\odot}$ ). The dashed blue line indicates the border of the regime of direct black hole formation (*black*). This domain is interrupted by a strip of pair-instability supernovae that leave no remnant (*white*). Outside the direct regime of BH formation by fallback (*red cross-hatching and bordered by a black dot-dash*) of neutron stars. The lowest mass neutron stars may be made by O/Ne/Mg core collapse. Even lower mass, the cores do not collapse and only white dwarfs are made (*white strip at the very left*).

INITIAL MASS



# Immagini artistiche di NS (Pulsars), BH e BH rotanti (Kerr)



# Masse e Raggi di Buchi Neri

$$R_s = (2G / c^2 ) M$$

***Per Sole  $M = 2 \times 10^{33} \text{ g}$  e  $R_s = 3 \text{ km}$***

Classe	Massa	Raggio
Buco nero supermassiccio	$\sim 10^6 - 10^9 M_{\text{Sole}}$	$\sim 0.001 - 400 \text{ AU}$
Buco nero di massa intermedia	$\sim 10^3 M_{\text{Sole}}$	$\sim 10^3 \text{ km} \approx R_{\text{Terra}}$
Buco nero stellare	$\sim 3 - 30 M_{\text{Sole}}$	$\sim 30 \text{ km}$
Micro buco nero	fino a $\sim M_{\text{Luna}}$	fino a $\sim 0.1 \text{ mm}$



# Perché le OG sono così importanti?

## Esse sondano l'Era di Planck

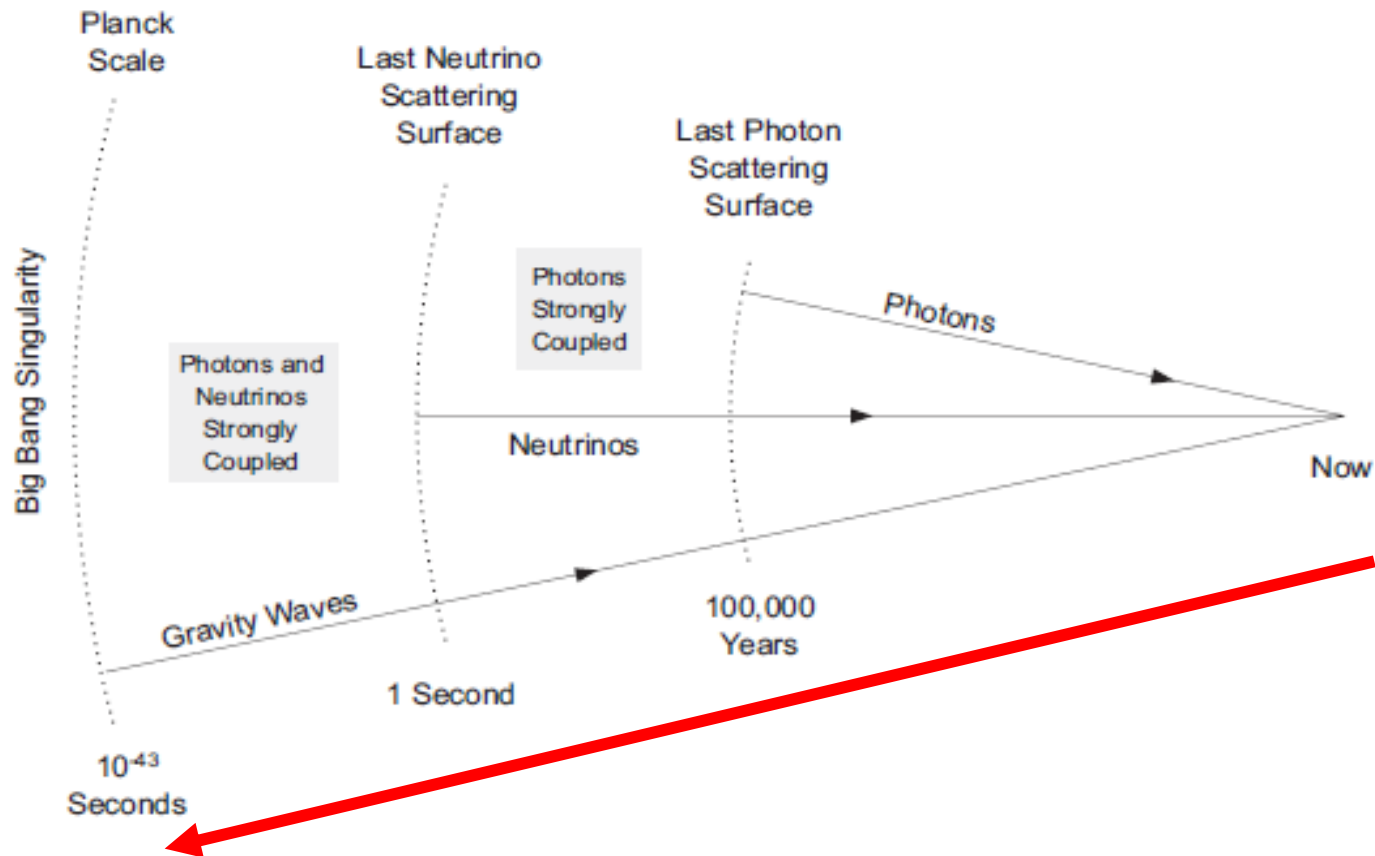


Figure 21.1: Probes of the early Universe. More weakly interacting particles can be seen from earlier epochs. In principle, gravity waves from times close to the Planck scale might be visible in the current Universe.

# Onde Gravitazionali: considerazioni generali

- *Fino ad ora non erano mai state rivelate, non perché siano rare, ma perché interagiscono molto debolmente con la materia.*
- Rivelare le OG è una ulteriore conferma della RG.
- Negli anni passati, una Pulsar Binaria è stata la migliore prova indiretta delle OG.

# Teoria Elementare delle Onde Gravitazionali

- Fisica Newtoniana: lo Spazio è una griglia rigida di coordinate (cartesiane, ...)

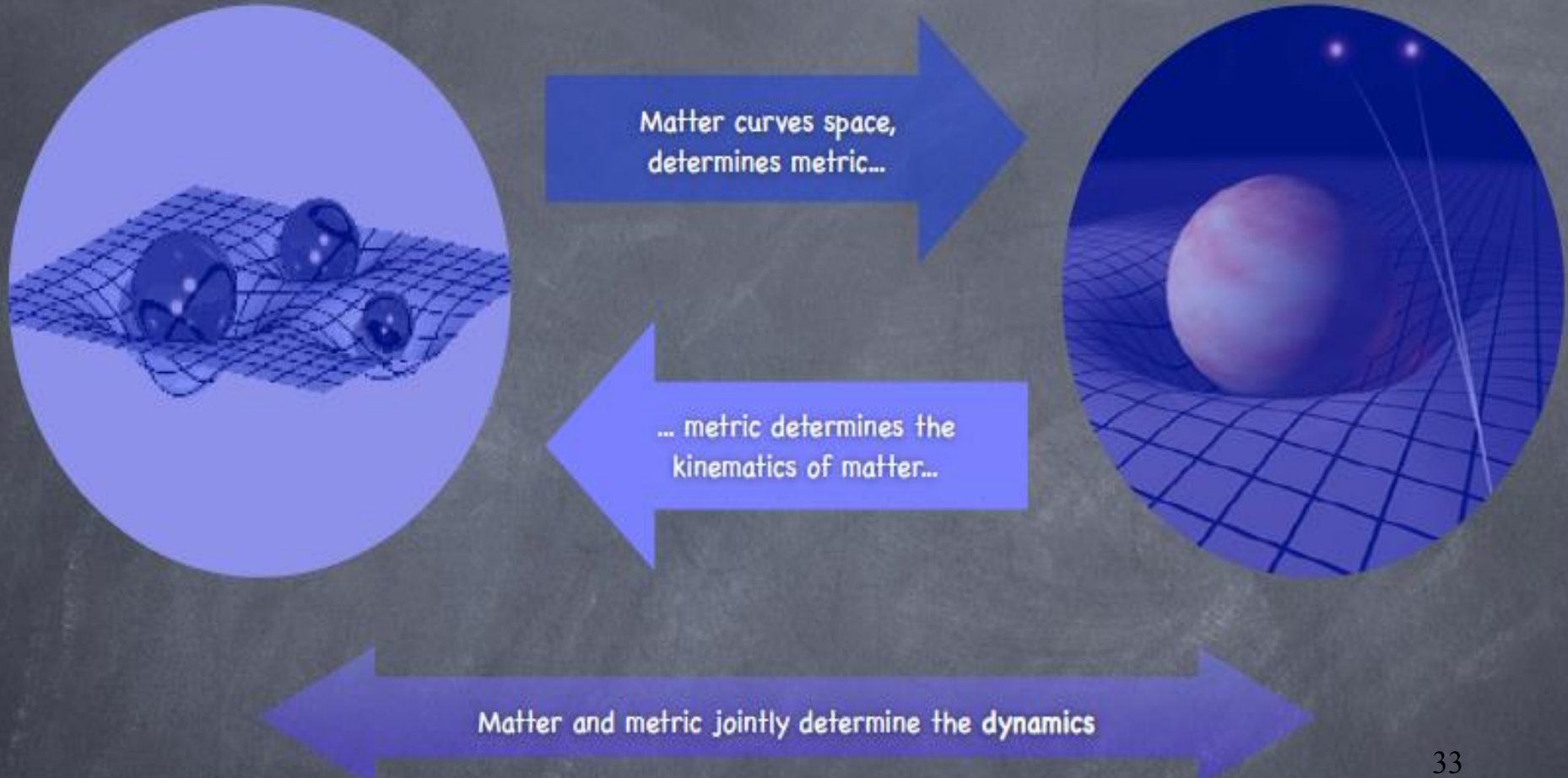
**La Materia dice allo Spazio-Tempo come curvarsi**

**e**

**Lo Spazio-Tempo dice alla Materia come muoversi**

- La Gravità è data dalle proprietà geometriche dello Spazio Tempo.

# Visione Artistica del legame Massa-Energia e Spazio-Tempo



# Equazioni di Campo di Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$

- Energy-momentum tensor

$R_{\mu\nu}$

- Ricci tensor

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

- Curvature scalar

$G_{\mu\nu}$

- Einstein tensor

- $g_{\mu\nu}$  metric tensor

# Equazioni di Campo di Einstein

- Nelle unità geometriche ( $G=c=1$ ) le equazioni di campo di Einstein diventano

***La soluzione delle equazioni di campo è il tensore della metrica  $g_{\mu\nu}$  che descrive come è strutturato lo Spazio Tempo.***

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\alpha_\alpha),$$

- Nel Vuoto si riducono a

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

# Generale Tensore Metrico

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

*metrica*

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\alpha)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Spazio-tempo curvo, in generale



Per mettere in evidenza l' esistenza delle OG si comincia con lo studio delle Equazioni di Einstein lontano da sorgenti massa-energia (campi deboli)

- La non linearita' delle equazioni della RG le rendono difficili da risolvere nella maggior parte dei casi.
- E' pertanto utile sviluppare una forma approssimata delle equazioni di campo nel caso frequente di Campi Gravitazionali Deboli.
- Bisogna linerizzare le equazioni di campo.

# Nel caso di Spazio-Tempo Piatto (Assenza di Materia): Metrica di Minkowski

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \underline{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

intervallo

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Descrive uno spazio-tempo piatto

# Linearizzazione

- Si parte dalle equazioni di campo con il tensore metrico contratto, e si pone

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

con  $h_{\mu\nu}$  piccolo.

- Si linearizza il tensore di curvatura  $R_{\mu\nu}$  e i suoi simboli di Christoffel.
- Si riducono i gradi di libertà delle equazioni di campo imponendo la Gauge di Lorenz e la Gauge Transverse Trace-less. ***Solo due stati di polarizzazione sono possibili.***
- Si arriva alla equazione per le onde.

# Equazione delle Onde Gravitazionali

Spazio-Tempo quasi piatto

Assenza di Materia

Gauge Transverse-Traceless

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

*Minkowski*

*perturbazione*

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0$$

Le equazioni di Einstein prendono la forma di una equazione d'onda che si propaga con la velocità della luce.

# Espressione Generale delle Onde Gravitazionali

*Le onde sono pensate propagarsi lungo l'asse z.*

*Le onde gravitazionali sono sempre onde trasversali.*

*Le distorsioni provocate localmente dal passaggio di un'onda sono sempre ortogonali alla sua direzione di propagazione.*

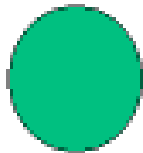
Tensore di polarizzazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Due Stati di Polarizzazione

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

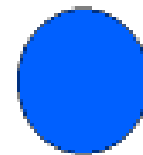
$$\hat{h}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Polarizzazione Plus (+)

$$h = a \hat{h}_+ + b \hat{h}_\times$$

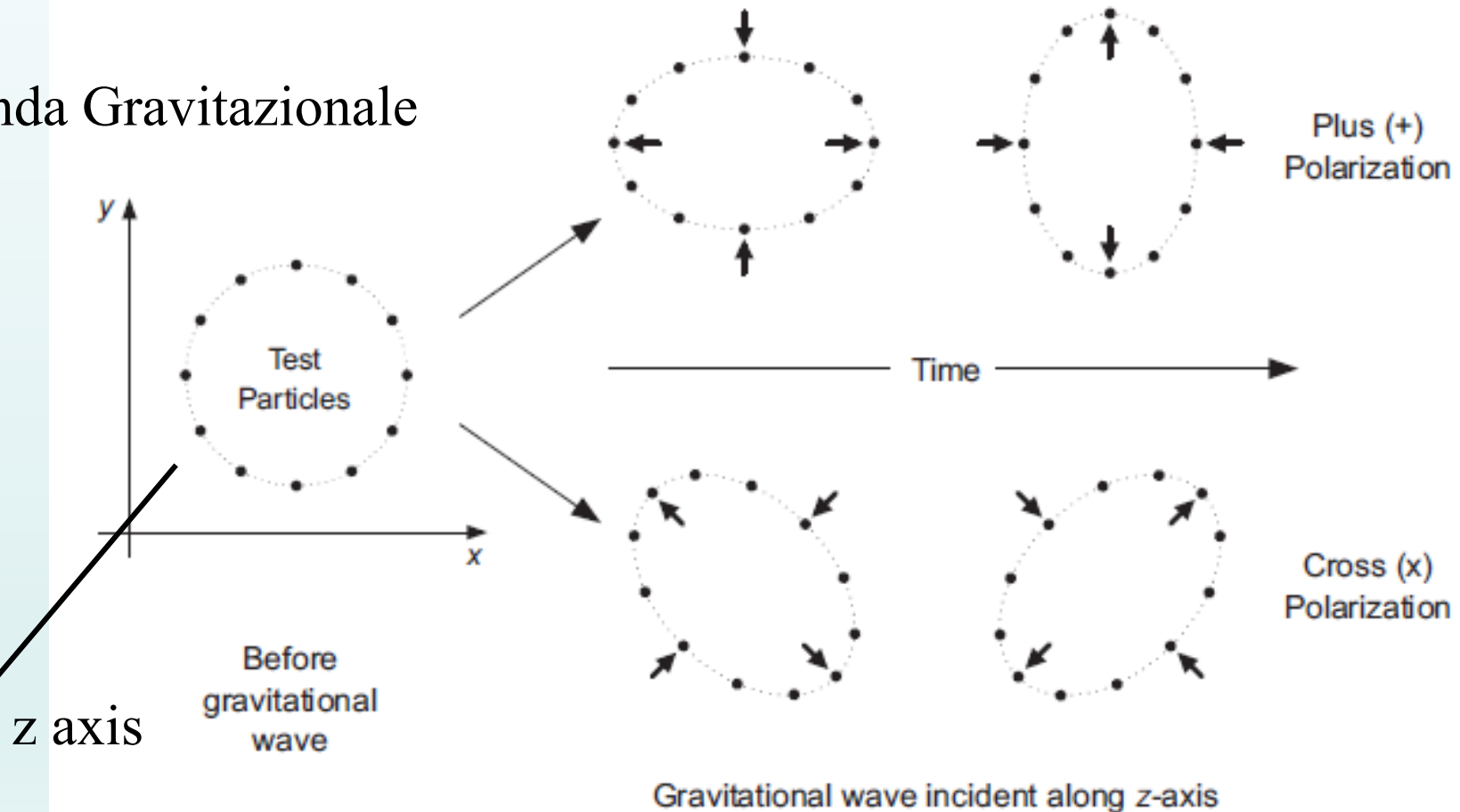
$$\hat{h}_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Polarizzazione Cross (×) 43

# Effetto della Polarizzazione: Stira e Schiaccia & Schiaccia e Stira

Onda Gravitazionale





# Risposta delle Particelle di Prova alle Onde Gravitazionali

- Non possiamo rivelare un' OG da effetti solamente locali.

- In una  
scompa

***Effetti solo locali non possono  
rivelare le Onde Gravitazionali.***

- Pertanto  
prova.

- Le OG  
prova i

***E' necessario avere corpi estesi.***

# Risposta di due particelle di prova all'azione delle Onde Gravitazionali

- Assumiamo OG tipo Plus lungo asse z corrispondente a metrica

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + f(t - z))dx^2 + (1 - f(t - z))dy^2 + dz^2$$

- Considera ***La distanza geometrica tra A e B non cambia a causa delle Onde Gravitazionali***
- Massa  $m_A$
- Massa  $m_B$
- Particelle  $(1, 0, 0, 0)$
- Perturbando la equazione della geodetica al primo ordine ed imponendo la TT-Gauge, otteniamo

$$\frac{d^2(\delta x^i)}{d\tau^2} = -\delta\Gamma_{00}^i = 0$$

# La Distanza Propria fra A e B invece cambia sotto un' Onda Gravitazionale

For example, assume A and B to lie on the  $x$  axis and to be separated by a distance  $L_0$ . From

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + f(t - z))dx^2 + (1 - f(t - z))dy^2 + dz^2.$$

the rel

***La Distanza propria tra A e B cambia a causa delle Onde Gravitazionali***

corres

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 + h_{xx}(t, 0) \end{pmatrix},$$

where  $h_{xx} = h_{11}$  and we have chosen  $z = 0$  at time  $t$ .

# La Distanza Propria fra A e B invece cambia sotto un' Onda Gravitazionale

- La distanza propria fra punti massa A e B è data da

*Per tipiche fluttuazioni legate alle OG prodotte da oggetti astronomici distanti e rivelabili sulla Terra si ha*

$$\delta L/L_0 = 10^{-21}$$

- Pertanto

- Che oscil

zionale.

# Produzione di Onde Gravitazionali

- La produzione di onde gravitazionali richiede una distribuzione di massa non sferica.
- Masse in moto accelerato emettono energia sotto forma di onde gravitazionali.
- Non ci sono componenti di monopolo o dipolo nella generazione di onde gravitazionali.
- La generazione di onde gravitazionali di ordine più basso corrisponde ad una distorsione di quadrupolo dipendente dal tempo e dalla distribuzione di massa.
- La radiazione emessa può essere espressa in termini di un potenziale ritardato.

# Le OG sono emesse solo da Distorsioni di Quadrupolo della Sorgente

Le perturbazioni della metrica dovute ad OG con lunga lunghezza d'onda emesse da sorgenti non relativistiche ( $\lambda \ll$  dimensioni della sorgente source  $\rightarrow$  velocità delle masse interne alla sorgente  $\ll c$ )

$$\bar{h}^{ij}(t, \mathbf{x})_{r \rightarrow \infty} \simeq \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r)$$

Dove i due punti indicano al derivata seconda rispetto al tempo e

$$\bar{h}^{ij}(t, \mathbf{x})$$

è l'ampiezza della perturbazione Trace-Reversed che soddisfa alle equazioni di campo (con sorgente) perturbate.



# Le OG sono emesse solo da Distorsioni di Quadrupolo della Sorgente

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\gamma_\gamma \\ &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\text{Tr} h,\end{aligned}$$

che soddisfa a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}.$$

Il secondo momento di massa  $I^{ij}(t)$  è dato da

$$I^{ij}(t) \equiv \int \rho(t, \mathbf{x}) x^i x^j d^3x,$$

dove  $\rho(t, \mathbf{x})$  è la densità di massa della sorgente.

# Termine Sorgente $T_{\mu\nu}$

The stress–energy tensor  $T_{\mu\nu}$  appearing in the linearized relation

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}.$$

has non-zero components of the form

$$T^{00} = \frac{T^{03}}{c} = \frac{T^{33}}{c} = \frac{c^2}{16\pi G} \left\langle (\dot{a}_+)^2 + (\dot{a}_\times)^2 \right\rangle,$$

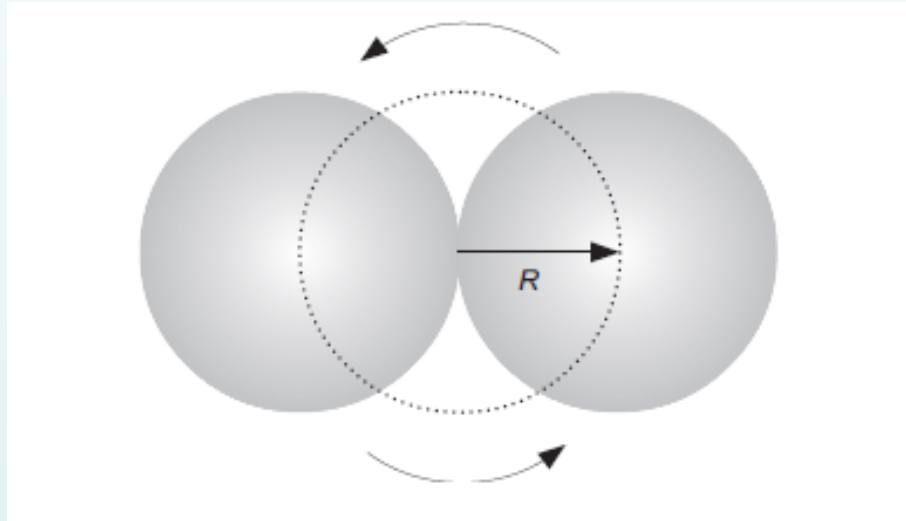
where

- $\langle \dots \rangle$  denotes an average over several wavelengths,
- $a_+$  and  $a_\times$  denote contributions from the two possible polarizations,
- $T^{00}$  is the energy density,
- $T^{03}$  is the energy flux ( $c^2$  times the momentum density),
- $T^{33}$  is the momentum flux.



# Ampiezza dell' Onda di Gravità: esempio

- Sistema binario a contatto di stelle uguali (M, R)



- In approssimazione lineare, l'ampiezza della OG è data da

$$\bar{h}^{ij}(t, \mathbf{x})_{r \rightarrow \infty} \simeq \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r),$$

*r* distanza da sorgente, esso tende ad infinito

# Ampiezza dell' Onda di Gravità: esempio

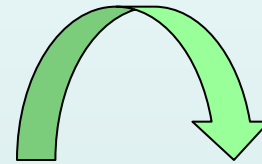
Il secondo momento di massa è

$$I^{ij}(t) = \int \rho(t, \mathbf{x}) x^i x^j d^3x = 2MR^2.$$

Il sistema ruota con periodo P e la seconda derivata rispetto al tempo introduce il fattore  $1/P^2$ .

$$\ddot{I}^{ij} \simeq 2 \frac{MR^2}{P^2}.$$

Alla fine ottengo



$$\bar{h}^{ij} \simeq \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij} = \frac{4MR^2}{rP^2}.$$

# Ampiezza dell' Onda di Gravità: esempio

$$v = \frac{2\pi R}{P},$$

Introducendo la velocità del baricentro delle stelle, il raggio di Schwarzschild ed rimettendo  $G$  e  $c$ , si ottiene

$$\bar{h}^{ij} \simeq \frac{4MR^2}{rP^2} \rightarrow \bar{h}^{ij} \simeq \frac{Mv^2}{\pi^2 r}.$$

$$\bar{h} \simeq \frac{r_s v^2}{r c^2}$$

L' ampiezza della perturbazione della metrica associata all' OG è maggiore per oggetti compatti che hanno raggio  $R$  confrontabile con il raggio di Schwarzschild.



# OG sono di solito emesse da sistemi gravitazionalmente legati

Teorema del Viriale

$$\frac{1}{2}Mv^2 \sim \frac{GM^2}{R},$$

dal quale si ha

$$\frac{v^2}{c^2} \simeq \frac{2GM^2}{MRc^2} = \frac{r_s}{R} = \epsilon^{2/7},$$

con efficienza di OG

$$\epsilon \equiv \left(\frac{r_s}{R}\right)^{7/2}$$

Pertanto  $\bar{h}$  è espresso da

$$\bar{h} \simeq \frac{r_s v^2}{r c^2} \simeq \frac{r_s^2}{rR} = \epsilon^{2/7} \frac{r_s}{r},$$

$$= 9.55 \times 10^{-17} \epsilon^{2/7} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{\text{kpc}}{r}\right),$$

che è adimensionale.

# Potenza emessa in Onde Gravitazionali

- La potenza in OG emesse da un sistema (in moto  $v \ll c$  e deboli interazioni gravitazionali interne) è data dalla relazione di quadrupolo

$$L = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \left\langle \dddot{I}^{ij} \dddot{I}^{ij} \right\rangle = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \dddot{I}^{ij} \dddot{I}^{ij} \right\rangle,$$

- dove  $\langle \rangle$  denota la media temporale su un periodo
- Tre punti indicano la derivata terza rispetto al tempo

$$I^{ij} \equiv I^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \text{Tr} I,$$

$$\text{Tr} I \equiv I^k_k.$$

è il tensore di quadrupolo contratto sulla metrica.

# Potenza emessa in Onde Gravitazionali

$$L = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \ddot{\mathbf{I}}_{ij} \ddot{\mathbf{I}}^{ij} \right\rangle$$

$$L \simeq L_0 \frac{r_s^2}{R^2} \left( \frac{v}{c} \right)^6,$$

La scala di potenza nelle OG emesse è

$$L_0 \equiv \frac{c^5}{G} = 3.6 \times 10^{59} \text{ erg s}^{-1} \quad \star$$

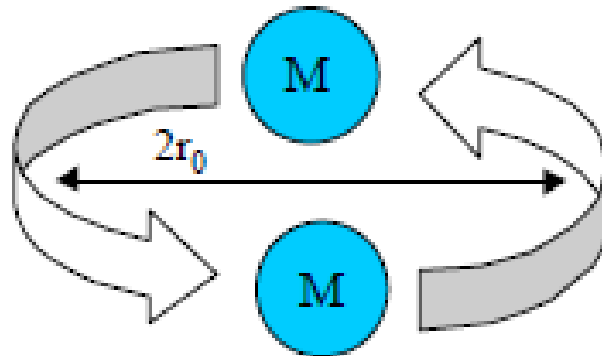
$$\varepsilon = \left( \frac{r_s}{R} \right)^{7/2}$$

L'energia totale emessa in un periodo è

$$\Delta E \simeq LP \simeq Mc^2 \left( \frac{r_s}{R} \right)^{7/2} = \varepsilon Mc^2$$

Parametrizza l'efficienza dell'emissione di OG da una sorgente di massa  $M$

# Caso Tipico: Due NS Orbitanti attorno al Comune Baricentro



$$M = 3 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1.4 M_S$$

$$r_0 = 20 \text{ km}$$

$$f_{\text{orb}} = 400 \text{ Hz}$$

$$R = 15 \text{ Mpc} \approx 4.5 \times 10^{23} \text{ m}$$

Le configurazioni possibili sono ovviamente tante e diverse. Ognuna avrà le sue relazioni per  $h$ ,  $L$  e  $\Delta E$  che dovranno essere valutate caso per caso.

$$h \equiv |h_{\mu\nu}| \approx \frac{r_{s1} r_{s2}}{r_0 R} \approx \underline{10^{-21}}$$

# Sorgenti Astronomiche: periodiche

- Sistemi binari di stelle di Neutroni (di solito i periodi sono troppo lunghi per osservazioni da Terra).
- Pulsars (assimetriche nella distribuzione interna di massa, le frequenze sono nell'intervallo 1 -1000 Hz, Crab Nebula).

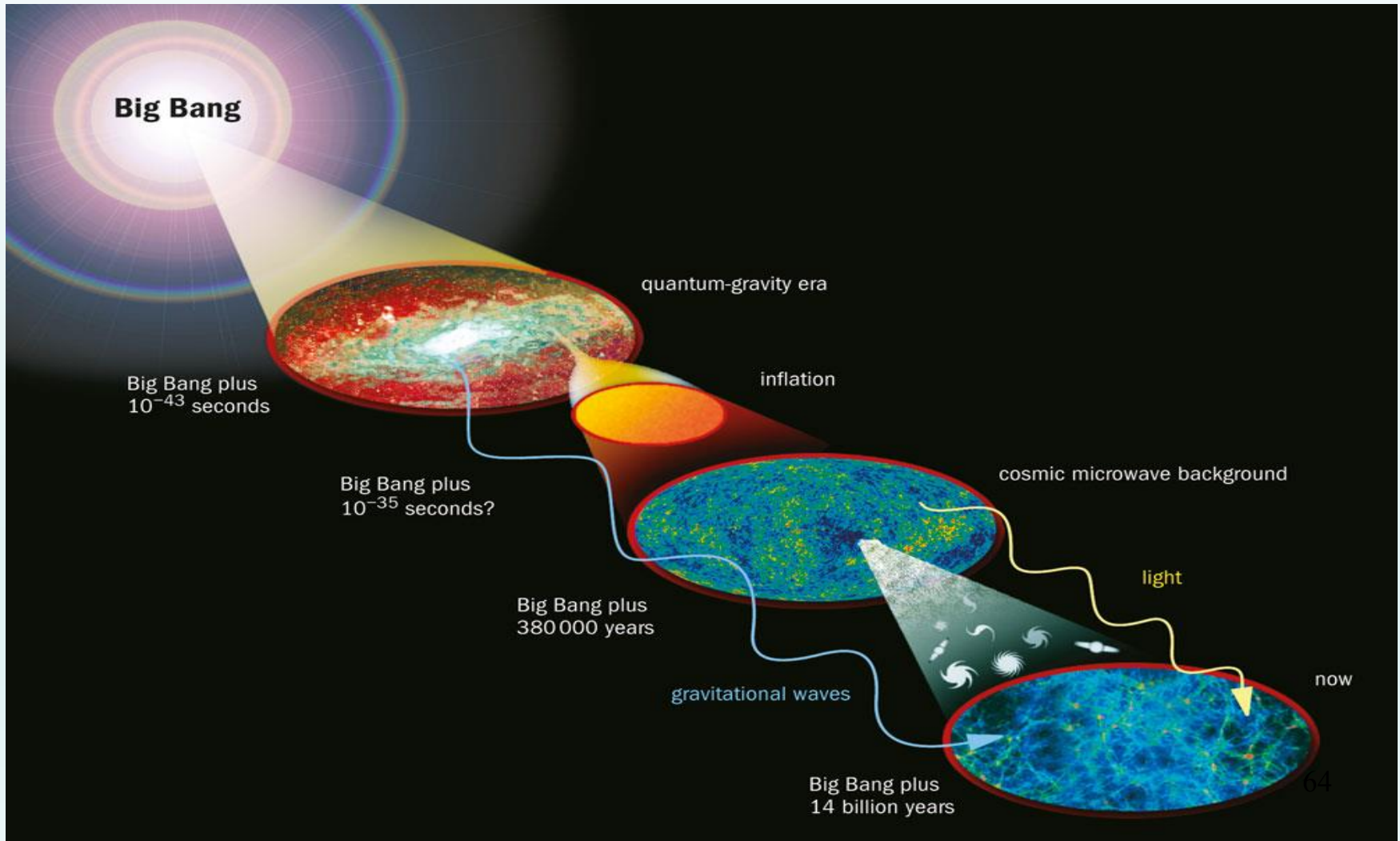


# Sorgenti Astronomiche: impulsive

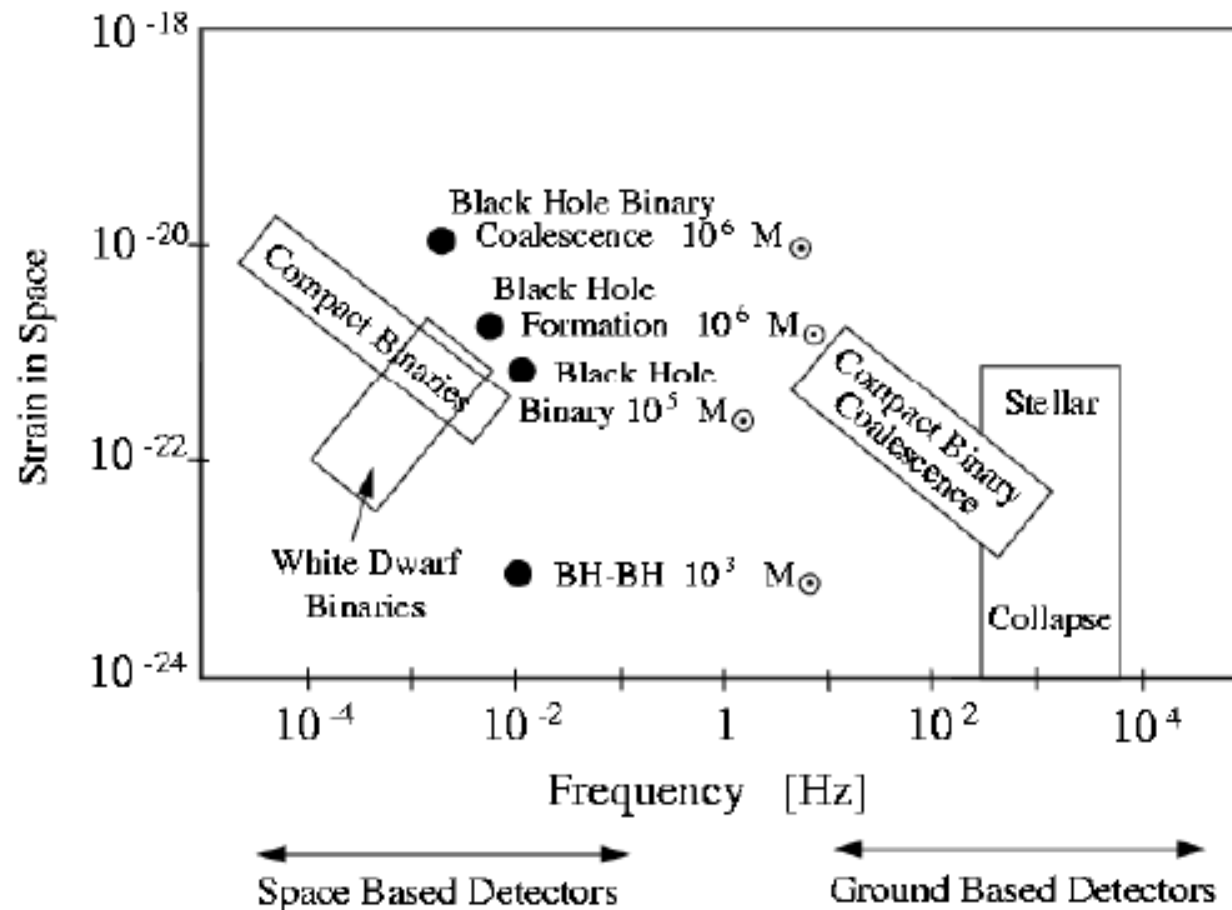
- Binarie coalescenti con  $h = 10^{-21}$  a 1 Hz per una sorgente nell'ammasso della Vergine. Distanza del Virgo Cluster  $D=16,5$  Mpc, or 53.8 Mly.
- Supernove di Tipo II da stelle massicce (asimmetrie nella distribuzione interna di massa e ripetuti bounces durante il collasso gravitazionale,  $h = 10^{-21}$ , alcuni eventi per anno)
- Buchi Neri (collasso gravitazionale e coalescenza).

# Sorgenti Astronomiche: stocastiche

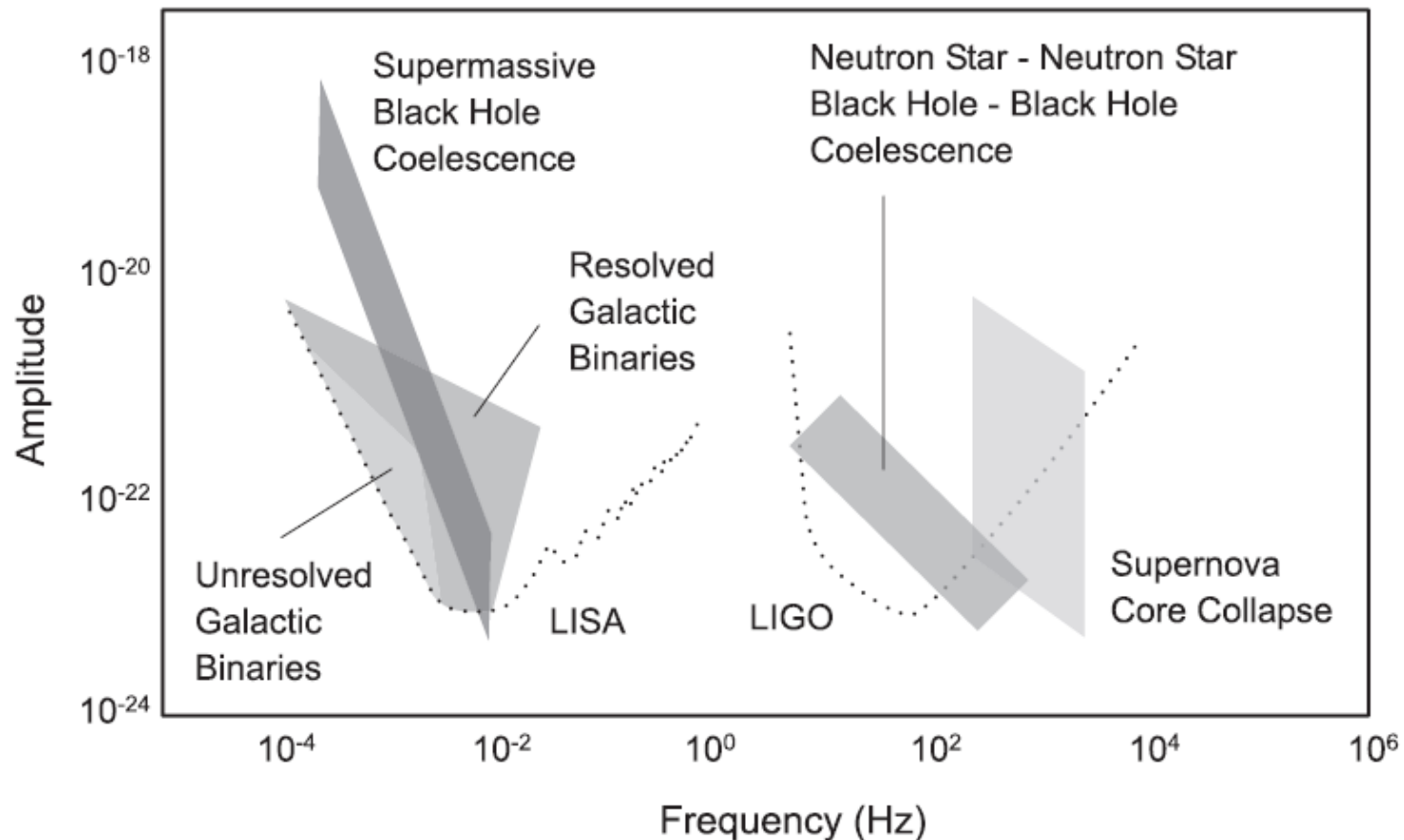
- Radiazione gravitazionale di fondo



# Predizioni Teoriche di Ampiezze e Frequenze delle OG



# Ampiezze e Frequenze di OG emesse da diverse sorgenti e limiti di rivelazione da Terra e dallo Spazio



# Onde Gravitazionali da Sorgenti Intense

- Fino ad ora abbiamo usato la RG linearizzata.
- Tuttavia le sorgenti osservate da LIGO-VIRGO ed in futuro da LISA ed altri rivelatori simili non possono essere descritte dall' approssimazione lineare.
- Il collasso del nucleo delle stelle massicce, la fusione di stelle di Neutroni e Buchi Neri (**NS +NS** o **NS +BH** o **BH+BH**) comportano grandi curvature dello Spazio Tempo. → Sono pertanto necessarie delle Simulazioni Numeriche della RG (cf. A. Buonanno).
- Tuttavia molti aspetti dell'analisi lineare rimangono validi anche nel caso non lineare e/o possono essere dedotti dall'analisi dimensionale.

# Fusioni: NS+NS, NS+BH, BH+BH

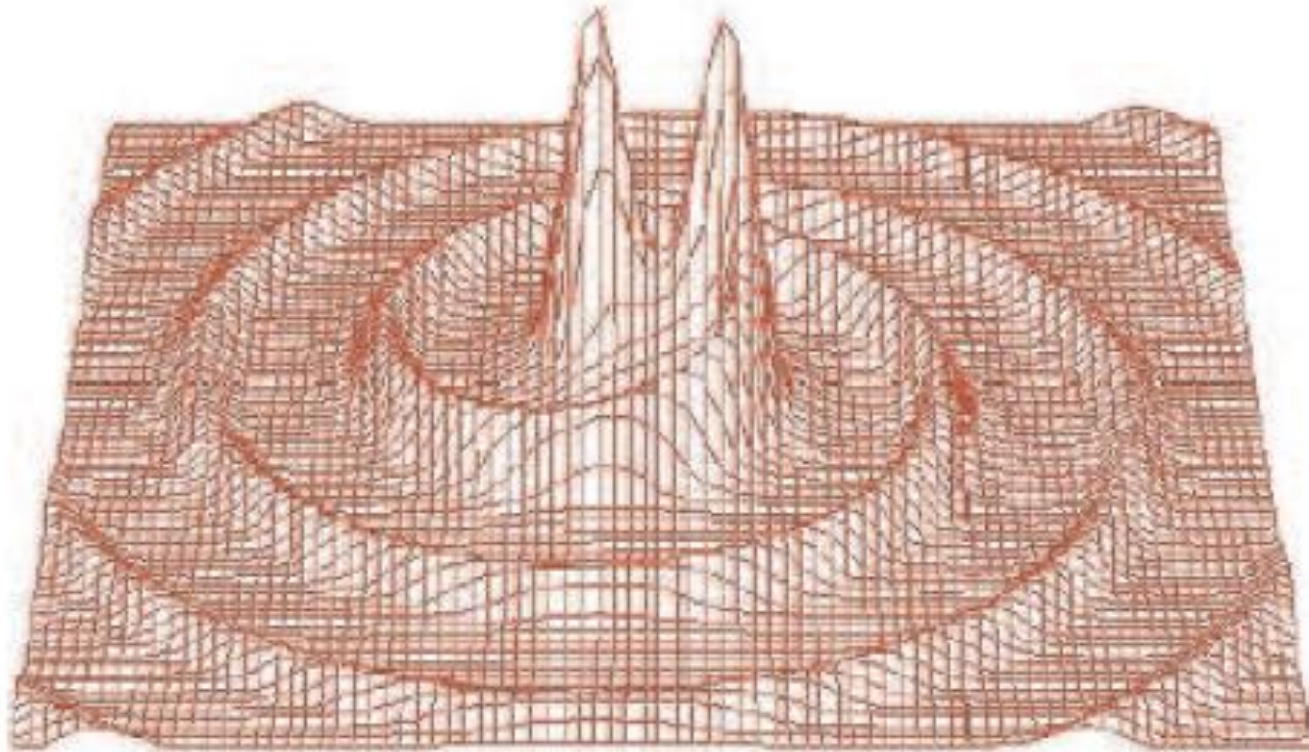
- Fusione diretta di NS o BH è poco probabile.
- Se due NS o BH sono in un sistema binario, il loro moto orbitale genera OG, l'orbita si restringe e alla fine le due NS o BH si fondono.
- La formazione di un sistema binario NS+NS, NS+BH, BH+BH non è facile.
- Bisogna avere un sistema binario di stelle massicce che diventano supernove e producono NS, ma le due NS rimangono legate durante l'esplosione di supernova. Oppure sempre stelle massicce binarie che vanno in BH.
- Oppure il sistema binario si forma in seguito per cattura gravitazionale.

# Fusion: NS+NS, NS+BH, BH+BH

- Questo scenari sembrano *improbabili* ma non *impossibili* (la frequenza attesa di eventi NS+NS è circa una fusione al giorno nell' Universo visibile).
- La probabilità di formare un sistema binario di NS o BH in una certa regione dello spazio è piccola ma l' Universo è *molto grande*.
- Rovescio della medaglia: il segnale atteso è *molto tenue*.



# Emissione di OG da due BH che spiraleggiano attorno al comune baricentro



Questo è l'evento osservato  
da LIGO-VIRGO



# Riferimenti

1. *Theoretical Astrophysics*, M. Guidry, 2007
2. *Gravitational Waves*, A. Buonanno, 2007
3. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The physics of compact objects*, S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, John Wiley & Sons, NY, 1975
4. *Space time and geometry: an introduction to General Relativity*, S. Carroll, Addison Wesley, 2003
5. *Onde Gravitazionali*, Helios Vocca, 2002
6. *An introduction to General relativity, Gravitational waves and Detection Principles*, M. Hendry, VESF School, 2007

**FINE**